

В. И. Арнольд

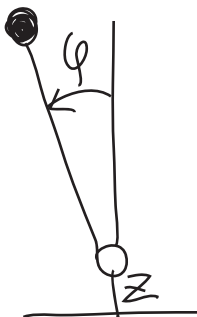
Математическое понимание природы

Очерки удивительных физических явлений
и их понимания математиками
(с рисунками автора)

Москва
Издательство МЦНМО
2009

Устойчивость перевёрнутого маятника и швейная машинка Капицы

Пусть точка подвеса маятника совершает колебания в вертикальном направлении, $z = a \cos(\Omega t)$. Если частота Ω этих колебаний достаточно велика, то перевёрнутый вверх ногами маятник (на рисунке $\varphi = 0$) будет устойчиво стоять вверх ногами.



Решение. Переходя к (неинерциальной) системе координат, в которой точка подвеса неподвижна, мы должны будем прибавить к действующей на маятник силе тяготения силу инерции, пропорциональную ускорению системы координат,

$$\ddot{z} = \Omega^2 a \cos(\Omega t).$$

Это эквивалентно соответствующим колебаниям постоянной тяготения g в обычном уравнении (перевёрнутого) маятника длины l ,

$$\ddot{\varphi} = (l/g) \sin \varphi.$$

Исследование возникающего дифференциального уравнения второго порядка (с периодически меняющимися со временем коэффициентами) доставляется «теорией КАМ» (см., например, книгу: В. Арнольд, А. Авец «Эргодические проблемы классической механики», 1967, переизданную в 1999 году в Ижевске редакцией журна-

ла «Регулярная и хаотическая динамика», с. 87—90, 245—263).

Заменяя трудное нелинейное уравнение движений маятника линеаризацией, получаем линейное «уравнение малых колебаний» перевёрнутого маятника

$$\ddot{\varphi} = (l/g)\varphi.$$

Собственные числа оператора монодромии этого линейного уравнения с периодическими коэффициентами можно вычислить, хотя бы приближённо, интегрируя это уравнение в течение периода ($0 \leq t \leq T = 2\pi/\Omega$) компьютером или с помощью теории возмущений (как это описано, например, в книге: В. Арнольд «Обыкновенные дифференциальные уравнения», с. 281—289 в четвёртом издании, Ижевск, 2000).

В результате для перевёрнутого маятника длиной $l = 20$ см и амплитудой точки подвеса 1 см собственные числа оператора монодромии доставляют устойчивость положения равновесия $\varphi = 0$ линеаризованного уравнения при вертикальных колебаниях с частотой более 30 колебаний в секунду.

Вывод, что эта устойчивость сохраняется и для нелинейного маятника, вовсе не очевиден, но верен.

Замечание. Приведённая задача возникла в теории ускорителей. Один из проектов основывался на устойчивости перевёрнутого маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса (вопрос об устойчивости кругового движения ускоряемых частиц сводился к такому же уравнению).

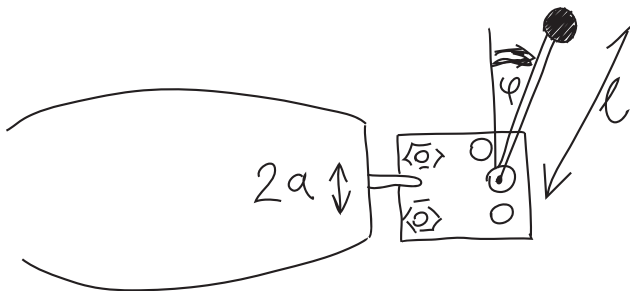
П. Л. Капица предложил, прежде чем тратить миллионы на строительство ускорителя, экспериментально проверить вывод о маятнике. Он переделал электрическую швейную машинку так, что её вращение доставляло вертикальные колебания точки подвеса маятника.

Маятник устойчиво стоял вверх ногами, а при небольшом отклонении в сторону начинал качаться вокруг это-

го вертикального положения, как качается обычный маятник около своего нижнего положения равновесия.

Когда П. Л. Капица был председателем оргкомитета физической олимпиады школьников, а В. И. Арнольд — математической, причём оба оргкомитета заседали (в Институте физпроблем) совместно, П. Л. показал членам этих оргкомитетов свою швейную машинку с маятником, сохранившуюся в соседнем кабинете как реликвия.

Не имея электрической швейной машинки, В. И. Арнольд приспособил для создания вертикальных колебаний точки подвеса маятника электробритву «Нева» (вибрационного типа)¹.



Верхнее положение равновесия оказалось неустойчивым, так как длина маятника $l = 20$ см была слишком велика. Пришлось проделать (линеаризованные) вычисления, результаты которых приведены выше.

После уменьшения длины маятника до 10 см его колебания (около верхнего положения равновесия) стали устойчивыми, и тогда В. И. Арнольд доказал эту устойчивость при помощи теории КАМ (уже с 1961 года располагавшей нужной общей «теоремой об устойчивости эллиптических неподвижных точек», обосновывающей возможность судить об устойчивости нелинейной системы по её линеаризации).

¹Видеозапись работы той самой электробритвы есть на сайте «Математические этюды» (<http://etudes.ru>).

Ускорители были к тому времени уже построены, так как физиков удовлетворила экспериментальная проверка устойчивости в опытах Капицы со швейной машинкой (несмотря на то, что они не располагали ещё математической теорией КАМ, строго доказывающей эту нетривиальную нелинейную устойчивость).