Математические заметки

том 67 выпуск 4 апрель 2000

УДК 514.174+517.5

МИНИМАЛЬНЫЙ ДИЗАЙН 11-ГО ПОРЯДКА НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

Н. Н. Андреев

В статье доказывается, что 120 вершин правильного четырехмерного многогранника с символом Шлефли $\{3,3,5\}$ являются минимальным сферическим дизайном 11-го порядка на S^3. Показывается, что заряды, расположенные в этих вершинах, доставляют минимум потенциальной энергии системы из 120 равных зарядов, расположенных на S^3.

Библиография: 23 названия.

Пусть $S^{m-1}=\{(x_1,x_2,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m \mid x_1^2+x_2^2+\dots+x_m^2=1\}$ – единичная сфера в m-мерном евклидовом пространстве; для $x,y\in\mathbb{R}^m$ через xy обозначим скалярное произведение векторов; $|x|=\sqrt{xx}$.

Конечное множество точек $X=\{x^{(k)}\}_{k=1}^N\subset S^{m-1}$ называется *взвешенным дизайном порядка* q, если кубатурная формула

$$\frac{1}{\operatorname{mes} S^{m-1}}\int_{S^{m-1}} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^N p_k f(x^{(k)}), \qquad \sum_{k=1}^N p_k=1, \tag{1}$$

верна для всех алгебраических полиномов $f(x)$ степени не выше q (под *степенью* монома $x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}$ понимается сумма показателей $\alpha_1+\dots+\alpha_m$). В этой статье рассматривается лишь случай положительных весов:

$$\forall k \quad p_k>0.$$

Основная задача состоит в нахождении множеств X и весов $\{p_k\}$, для которых выполняется (1). Особый интерес представляют множества X, содержащие минимальное количество точек, необходимое для выполнения (1). Такие множества называются *минимальными взвешенными дизайнами*. Отдельный интерес представляет случай равных весов. В этом случае употребляются термины *дизайн* и *минимальный дизайн*.

Простейший минимальный дизайн – две противоположные точки сферы S^{m-1}, являющиеся минимальным дизайном первого порядка. Примерами дизайнов являются вершины некоторых правильных многогранников. Так правильный симплекс, вписанный в сферу S^{m-1} (множество из $m+1$ точки с равными попарными расстояниями), является минимальным дизайном 2-го порядка для любого m. Октаэдр, вписанный в сферу

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01210.

(множество точек пересечения S^{m-1} с координатными осями), является минимальным дизайном 3-го порядка в любой размерности. Вершины икосаэдра образуют минимальный дизайн порядка 5. В то же время вершины куба и додекаэдра, являясь дизайнами соответственно 3-го и 5-го порядка, не являются минимальными. Все вышеперечисленные минимальные дизайны являются минимальными и в классах взвешенных дизайнов соответствующих порядков. В общей ситуации это не всегда так (см., например, [1]).

Количество точек минимального взвешенного дизайна порядка q на S^{m-1} будем обозначать $N(m,q)$, а минимального дизайна с равными весами – $N^*(m,q)$; очевидно, $N^*(m,q) \geqslant N(m,q)$. Оценкам снизу мощности минимальных дизайнов посвящен ряд работ. В [2] получена оценка

$$N^*(m,q) \geqslant \begin{cases} \dbinom{m+s-1}{m-1} + \dbinom{m+s-2}{m-1}, & q = 2s, \\ 2\dbinom{m+s-1}{m-1}, & q = 2s+1. \end{cases}$$

При $m = 4$ и $q = 11$ из нее следует неравенство $N^*(4,11) \geqslant 112$. В работах [3], [4] получена оценка $N^*(4,11) \geqslant 117$. В то же время 120 вершин правильного многогранника четырехмерного евклидова пространства с символом Шлефли $\{3,3,5\}$ [5] – 8 вершин вида $(\pm1,0,0,0)$, $(0,\pm1,0,0)$, $(0,0,\pm1,0)$, $(0,0,0,\pm1)$; 16 вершин вида $(\pm1/2,\pm1/2,\pm1/2,\pm1/2)$ и 96 вершин, полученных из 8 точек вида $(\pm(\sqrt{5}+1)/4, \pm1/2, \pm(\sqrt{5}-1)/4, 0)$ четными перестановками координат, – являются [6] дизайном 11-го порядка и, значит, $N^*(4,11) \leqslant 120$. Совокупность приведенных 120 точек будет обозначаться $\mathfrak{M}$.

За последние годы доказана минимальность лишь нескольких дизайнов (см. обзор [7] и работу [1]). В этой статье доказывается минимальность еще одного дизайна в классе взвешенных дизайнов.

Теорема 1. *Пусть множество $X = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N \subset S^3$ есть минимальный взвешенный дизайн порядка* 11 *с положительными весами. Тогда*

$$N(4,11) = N^*(4,11) = 120.$$

Для доказательства оценок снизу будет использоваться соображение Дельсарта [8], получившее развитие в работах [3], [9]–[13]. Оно базируется на свойствах системы многочленов Гегенбауэра $\{G_\nu^{(m)}(t)\}_{\nu=0}^\infty$, ортогональных на интервале $(-1,1)$ с весом $(1-t^2)^{(m-3)/2}$ и с нормировкой $G_\nu^{(m)}(1) = 1$:

$$G_0^{(m)}(t) = 1, \quad G_1^{(m)}(t) = t, \quad G_2^{(m)}(t) = \frac{mt^2-1}{m-1}, \quad \dots,$$
$$(\nu+m-2)G_{\nu+1}^{(m)}(t) = (2\nu+m-2)tG_\nu^{(m)}(t) - \nu G_{\nu-1}^{(m)}(t).$$

В геометрических задачах используется положительная определенность многочленов Гегенбауэра [14, с. 318]: для любого конечного множества точек $x^{(1)},\dots,x^{(N)}$ из S^{m-1}, любого $\nu \in \mathbb{N}$ и любых $\xi_1,\dots,\xi_N \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k,l=1}^N G_\nu^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)})\xi_k\overline{\xi}_l \geqslant 0.$$

В дальнейшем нам будет удобнее пользоваться эквивалентным определением понятия взвешенного дизайна порядка q как множества точек $X = \{x^{(k)}\}_{k=1}^{N} \subset S^{m-1}$, для которого справедливы равенства

$$\sum_{k,l=1}^{N} G_{\nu}^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)})p_k p_l = 0, \qquad \nu = 1, 2, \dots, q.$$

Наряду со взвешенными дизайнами порядка q, рассматриваемыми выше, будем использовать понятие D-дизайна, по-видимому введенное Дельсартом (см. [15]). Множество точек $X = \{x^{(k)}\}_{k=1}^{N} \subset S^{m-1}$ называется *взвешенным D-дизайном*, где $D \subset \mathbb{N}$ есть подмножество натурального ряда, если справедливы равенства

$$\sum_{k,l=1}^{N} G_{\nu}^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)})p_k p_l = 0, \qquad \nu \in D.$$

При $D = \{1, 2, \dots, q\}$ это есть классический взвешенный дизайн порядка q. Многие дизайны порядка q являются D-дизайнами для более широкого, чем $\{1, 2, \dots, q\}$, множества D, и, как будет следовать из дальнейшего, этот факт иногда оказывается важным при оценке мощности дизайнов и в других вопросах. Так, например, $\mathfrak{M}$, являясь, как уже было отмечено, дизайном 11-го порядка, является [16] $D_{\mathfrak{M}}$-дизайном для

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{M}} = &\{\text{все нечетные натуральные числа}\} \\ &\cup \{2, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 18, 22, 26, 28, 34, 38, 46, 58\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Через $N(m, D)$ будем обозначать количество точек минимального взвешенного D-дизайна. В статье будут сформулированы экстремальные задачи теории функций, позволяющие оценивать снизу мощность D-дизайнов.

Конструкции, являющиеся дизайнами, оказываются решением некоторых задач дискретной геометрии об экстремальном расположении точек на сфере. Рассмотрим задачу о расположении зарядов на сфере, минимизирующем потенциальную энергию системы. Пусть в точках $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{N} \subset S^{m-1}$ расположены единичные заряды. Функционал, обобщающий потенциальную энергию системы зарядов, расположенных в 3-мерном евклидовом пространстве, имеет вид

$$W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{N} \frac{1}{|x^{(k)} - x^{(l)}|^{m-2}}, \qquad m \geqslant 3.$$

Требуется найти расположение зарядов на сфере, минимизирующее этот функционал, т.е. величину

$$W(m, N) = \inf_{\{x^{(k)}\}_{k=1}^{N} \subset S^{m-1}} W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}),$$

и экстремальную конструкцию. История задачи начинается с экспериментов Томсона и описана в [17]–[19]. Значения параметров m и N, при которых решения известны, приведены в [20]. Следующая теорема дает решение еще одного частного случая этой задачи.

Теорема 2. *Пусть $m = 4$ и $N = 120$. Тогда $W(4,120) = 10790$; и экстремальная конструкция задается вершинами правильного многогранника с символом Шлефли $\{3,3,5\}$.*

Перейдем к доказательству теорем.

Доказательство теоремы 1. Вершины рассматриваемого многогранника являются дизайном 11-го порядка [6] и, следовательно, $N^*(4,11) \leqslant 120$.

Оценку снизу получим в общем случае – для D-дизайнов при произвольных m и D. Идея получения оценки заимствована из [2], [3]. Отметим, что, хотя в [3] рассматривается только случай классических дизайнов с равными весами, все рассуждения и результаты верны и для случая взвешенных дизайнов с положительными весами.

Рассмотрим класс $\mathscr{K}(m,D)$ непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

1) $f(t) \geqslant 0$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $f(1) > 0$;
2) $f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{f}_\nu G_\nu^{(m)}(t)$, где $\widehat{f}_\nu \leqslant 0$ при $\nu \in \mathbb{N} \setminus D$.

Предположим, что множество $X = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N \subset S^{m-1}$ является взвешенным D-дизайном с положительными весами $\{p_k\}_{k=1}^N$. Из положительности функции $f \in \mathscr{K}(m,D)$, весов p_k, а также из неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным найдем

$$I = \sum_{k,l=1}^N f(x^{(k)}x^{(l)})p_k p_l \geqslant \sum_{k=1}^N f(x^{(k)}x^{(k)})p_k^2 = f(1)\sum_{k=1}^N p_k^2 \geqslant f(1)\frac{\left(\sum_{k=1}^N p_k\right)^2}{N} = \frac{f(1)}{N}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k,l=1}^N f(x^{(k)}x^{(l)})p_k p_l = \sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{f}_\nu \sum_{k,l=1}^N G_\nu^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)})p_k p_l \\ &= \widehat{f}_0 \sum_{k=1}^N p_k p_l + \sum_{\nu\in D} \widehat{f}_\nu \sum_{k,l=1}^N G_\nu^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)})p_k p_l + \sum_{\nu\in\mathbb{N}\setminus D} \widehat{f}_\nu \sum_{k,l=1}^N G_\nu^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)})p_k p_l. \end{aligned}$$

Так как X – взвешенный D-дизайн с весами $\{p_k\}$, то вторая сумма равна нулю. В силу положительной определенности многочленов Гегенбауэра и неположительности коэффициентов Фурье $\widehat{f}_\nu$, участвующих в третьей сумме, она оказывается неположительной и, следовательно, справедливо неравенство

$$I \leqslant \widehat{f}_0 \sum_{k,l=1}^N p_k p_l = \widehat{f}_0\left(\sum_{k=1}^N p_k\right)^2 = \widehat{f}_0.$$

Объединяя полученные неравенства и учитывая, что $\widehat{f}_0 > 0$ в силу условия 1), приходим к оценке снизу мощности взвешенного D-дизайна на S^{m-1} через решение экстремальной задачи теории функций

$$N(m,D) \geqslant \sup_{f\in\mathscr{K}(m,D)} \frac{f(1)}{\widehat{f}_0}. \tag{3}$$

Для оценки снизу мощности взвешенного дизайна порядка q следует рассмотреть $D = \{1, 2, \dots, q\}$. Имеем

$$N(m,q) \geqslant \sup_{f \in \mathscr{K}(m, \{1,2,\dots,q\})} \frac{f(1)}{\widehat{f}_0}. \tag{4}$$

Вернемся к нашему случаю $m = 4$ и $q = 11$. Для доказательства того, что $\mathfrak{M}$ является минимальным дизайном 11-го порядка, будет решатся следующая экстремальная задача.

Пусть $D_{\mathfrak{M}}$ определено равенством (2). Рассмотрим класс $\mathscr{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}})$ непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

1) $f(t) \geqslant 0$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $f(1) > 0$;
2) $f(t) = \sum_{\nu \in D_{\mathfrak{M}}} \widehat{f}_\nu G_\nu^{(m)}(t)$ и $\widehat{f}_\nu \leqslant 0$ при $\nu > 12$.

Так как $\mathscr{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}}) \subset \mathscr{K}(4, \{1, 2, \dots, 11\})$ ввиду рассматриваемого $D_{\mathfrak{M}}$ и условия 2), то для мощности взвешенного дизайна порядка 11 на S^3 имеет место оценка

$$N(4,11) \geqslant \sup_{f \in \mathscr{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}})} \frac{f(1)}{\widehat{f}_0}. \tag{5}$$

Выберем функцию $f(t) \in \mathscr{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}})$ так, чтобы правая часть (5) стала максимальной. С этой целью рассмотрим семейство алгебраических многочленов

$$\begin{aligned} h_\mu(t) = (t+1)t^2 &\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \left(t^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^2 \left(t + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 \\ &\times \left(\frac{32768}{5} - \left(\frac{16384}{3} + \mu\right)t + \mu t^2\right). \end{aligned}$$

Разложим их в ряд Фурье по системе многочленов Гегенбауэра

$$h_\mu(t) = \widehat{(h_\mu)}_0 G_0^{(4)}(t) + \widehat{(h_\mu)}_1 G_1^{(4)}(t) + \dots + \widehat{(h_\mu)}_{17} G_{17}^{(4)}(t).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
&\widehat{(h_\mu)}_0 = 1, && \widehat{(h_\mu)}_1 = \frac{12}{5} - \frac{13\mu}{65536}, && \widehat{(h_\mu)}_2 = \frac{149}{20}, \\
&\widehat{(h_\mu)}_3 = \frac{118}{15} - \frac{9\mu}{16384}, && \widehat{(h_\mu)}_4 = \frac{59}{4}, && \widehat{(h_\mu)}_5 = \frac{64}{5} - \frac{45\mu}{65536}, \\
&\widehat{(h_\mu)}_6 = \frac{539}{30}, && \widehat{(h_\mu)}_7 = \frac{72}{5} - \frac{\mu}{2048}, && \widehat{(h_\mu)}_8 = \frac{153}{10}, \\
&\widehat{(h_\mu)}_9 = 12, && \widehat{(h_\mu)}_{10} = \frac{77}{10}, && \widehat{(h_\mu)}_{11} = \frac{36}{5} + \frac{9\mu}{16384}, \\
&\widehat{(h_\mu)}_{12} = 0, && \widehat{(h_\mu)}_{13} = \frac{14}{5} + \frac{49\mu}{65536}, && \widehat{(h_\mu)}_{14} = -\frac{11}{4}, \\
&\widehat{(h_\mu)}_{15} = \frac{8}{15} + \frac{\mu}{2048}, && \widehat{(h_\mu)}_{16} = -\frac{17}{12}, && \widehat{(h_\mu)}_{17} = \frac{9\mu}{65536}.
\end{aligned}$$

Покажем, что многочлены $h_\mu(t) \in \mathscr{K}^*(4, D_{\mathfrak{M}})$ при $\mu \in [-90112/15, -131072/35]$. Условие 1) будет выполнено, если квадратный трехчлен, стоящий последним множителем в определении $h_\mu(t)$, будет неотрицательным на $[-1, 1]$. Это имеет место при отрицательных $\mu \geqslant -90112/15$. При $\mu \leqslant -131072/35$ все коэффициенты Фурье полинома

$h_\mu(t)$ с номерами большими 12 неположительны, а двеннадцатый коэффициент и все коэффициенты с номерами большими 17 равны нулю, значит условие 2) тоже выполнено.

Так как $h_\mu(1) = \sum_{\nu=0}^{17} \widehat{(h_\mu)}_\nu = 120$ для любого $\mu \in \mathbb{R}$, любой многочлен из указанного семейства при $\mu \in [-90112/15, -131072/35]$ дает требуемую оценку $N(4,11) \geqslant 120$.

Ввиду неравенств $120 \geqslant N^*(4,11) \geqslant N(4,11)$ теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая лемма.

Лемма [21, с. 71]. *Пусть $z, c, z_1, \dots, z_s \in \mathbb{C}$, все $z_k \neq c$ и различны; $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}_+$, $n = n_1 + \dots + n_s$. Для функции*

$$f(z) = \frac{1}{c-z}$$

интерполяционный полином $p_{n-1}(z)$ степени $n-1$, удовлетворяющий соотношениям

$$p_{n-1}^{(l)}(z_k) = f^{(l)}(z_k), \qquad k = 1, \dots, s, \quad l = 0, \dots, n_k - 1, \tag{6}$$

имеет вид

$$p_{n-1}(z) = \frac{1}{c-z} - \frac{\omega(z)}{\omega(c)(c-z)}, \tag{7}$$

где $\omega(z) = (z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\cdots(z-z_s)^{n_s}$.

Ввиду простоты приведем доказательство леммы.

Доказательство. Приводя к общему знаменателю правую часть (7), убеждаемся, что она определяет полином по z степени $n-1$: $\omega(z)$ есть полином по z степени n, а в точке $z = c$ особенности нет, так как числитель тоже обращается в нуль. Дифференцируя и подставляя $z = z_k$, убеждаемся, что условия (6) выполнены. В силу единственности интерполяционного полинома степени $n-1$, определенного равенствами (6), лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Оценку сверху $W(4,120) \leqslant 10790$ дают заряды, расположенные в 120 вершинах многогранника $\{3,3,5\}$.

Оценим $W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)})$ снизу. Пусть $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\} \subset S^{m-1}$ – произвольный набор точек на сфере, в которых расположены единичные заряды. Так как $x^{(k)} \in S^{m-1}$ $\forall k$, то

$$|x^{(k)} - x^{(l)}| = \sqrt{|x^{(k)} - x^{(l)}|^2} = \sqrt{2(1 - x^{(k)}x^{(l)})}.$$

Тогда

$$W(m, N, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}) = \sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{N} \frac{1}{|x^{(k)} - x^{(l)}|^{m-2}} = \sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{N} \frac{1}{\{2(1 - x^{(k)}x^{(l)})\}^{(m-2)/2}}.$$

Рассмотрим класс $\mathscr{F}(m)$ непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $f(t)$, удовлетворяющих условиям:

1) $f(t) \leqslant 1/\{2(1-t)\}^{(m-2)/2}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$;
2) $f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{f}_\nu G_\nu^{(m)}(t)$, $\widehat{f}_\nu \geqslant 0$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$.

Пусть $f(t) \in \mathscr{F}(m)$. В силу условия 1) можно записать

$$\begin{aligned} W(m,N,x^{(1)},\dots,x^{(N)}) &\geqslant \sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{N} f(x^{(k)}x^{(l)}) = \sum_{k,l=1}^{N} f(x^{(k)}x^{(l)}) - Nf(1) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \widehat{f}_\nu \sum_{k,l=1}^{N} G_\nu^{(m)}(x^{(k)}x^{(l)}) - Nf(1). \end{aligned}$$

Пользуясь положительной определенностью многочленов Гегенбауэра, их нормировкой, а также неотрицательностью коэффициентов Фурье функции $f \in \mathscr{F}(m)$, продолжим оценку

$$W(m,N,x^{(1)},\dots,x^{(N)}) \geqslant N^2\widehat{f}_0 - Nf(1).$$

Ввиду произвольности набора точек $\{x^{(1)},\dots,x^{(N)}\} \subset S^{m-1}$ приходим к оценке снизу для функционала энергии через решение экстремальной задачи

$$W(m,N) \geqslant \sup_{f\in\mathscr{F}(m)} \{N^2\widehat{f}_0 - Nf(1)\}. \tag{8}$$

Пусть теперь $m = 4$ и $N = 120$. Рассмотрим функцию

$$y(t) = \frac{1}{2(1-t)},$$

участвующую в определении класса $\mathscr{F}(4)$, и многочлен $h(t)$ с разложением по многочленам Гегенбауэра

$$h(t) = \widehat{h}_0 G_0^{(4)}(t) + \widehat{h}_1 G_1^{(4)}(t) + \dots + \widehat{h}_{17} G_{17}^{(4)}(t),$$

где

$$\begin{array}{llll} \widehat{h}_0 = \dfrac{65869}{79200}, & \widehat{h}_1 = \dfrac{132839}{99000}, & \widehat{h}_2 = \dfrac{827147}{528000}, & \widehat{h}_3 = \dfrac{62063}{39600}, \\ \widehat{h}_4 = \dfrac{49399}{35200}, & \widehat{h}_5 = \dfrac{18919}{16500}, & \widehat{h}_6 = \dfrac{61327}{72000}, & \widehat{h}_7 = \dfrac{5647}{9900}, \\ \widehat{h}_8 = \dfrac{29453}{88000}, & \widehat{h}_9 = \dfrac{1079}{6600}, & \widehat{h}_{10} = \dfrac{4363}{72000}, & \widehat{h}_{11} = \dfrac{289}{33000}, \\ \widehat{h}_{12} = 0, & \widehat{h}_{13} = \dfrac{161}{198000}, & \widehat{h}_{14} = \dfrac{97}{9600}, & \widehat{h}_{15} = \dfrac{203}{16500}, \\ & \widehat{h}_{16} = \dfrac{2737}{316800}, & \widehat{h}_{17} = \dfrac{3}{500}. & \end{array}$$

Непосредственно могут быть проверены следующие равенства:

$$h(t) = y(t) \tag{9}$$

при

$$t \in \left\{-1,\ -\frac{1+\sqrt{5}}{4},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{4},\ 0,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{4},\right.$$
$$\left.\frac{2363 - i\sqrt{169319}}{2112},\ \frac{2363 + i\sqrt{169319}}{2112}\right\};$$

и

$$h'(t) = y'(t) \tag{10}$$

при

$$t \in \left\{-1,\ -\frac{1+\sqrt{5}}{4},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{4},\ 0,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}.$$

Покажем, что многочлен $h(t) \in \mathscr{F}(4)$. Условие 2) выполнено в силу самого определения $h(t)$. С учетом (9) и (10) из леммы следует, что

$$h(t) = \frac{1}{2(1-t)} - \frac{\omega(t)}{2\omega(1)(1-t)},$$

где

$$\omega(t) = t^2(t+1)^2\left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^2\left(t^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^2\left(t + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2\left(t - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$
$$\times\left(\left(t - \frac{2363}{2112}\right)^2 + \frac{169319}{2112^2}\right).$$

Так как $\omega(t) \geqslant 0$ при $t \in [-1,1]$, то

$$h(t) \leqslant \frac{1}{2(1-t)}, \qquad t \in [-1,1],$$

что и требуется в условии 1) определения класса $\mathscr{F}(4)$.

Подставляя значения $\widehat{h}_0 = 65869/79200$ и $h(1) = 1631/165$ в (8), получаем $W(4,120) \geqslant 10790$. Оценка снизу совпадает с оценкой сверху, что и доказывает теорему 2.

Отметим, что, как и в задаче (5), в задаче (8) экстремальным является однопараметрическое семейство многочленов, которое не приводится здесь из-за своей громоздкости.

Конфигурация точек $\mathfrak{M}$, образованная вершинами многогранника $\{3,3,5\}$, является решением ряда классических задач дискретной геометрии. В [22] (см. также [23]) показывается, что это есть максимальный сферический $\cos\frac{\pi}{5}$-код. Здесь было доказано, что $\mathfrak{M}$ является минимальным сферическим дизайном 11-го порядка на S^3, а также наилучшим расположением точек в смысле задачи об энергии. Вершины рассматриваемого многогранника являются экстремальными и в некоторых других задачах дискретной геометрии, например в задаче Фейеш Тота. Так на $\mathfrak{M}$ достигаются верхние грани

$$\sup_{\{x^{(k)}\}_{k=1}^{120} \subset S^3} \sum_{k,l=1}^{120} |x^{(k)} - x^{(l)}|, \qquad \sup_{\{x^{(k)}\}_{k=1}^{120} \subset S^3} \prod_{k,l=1}^{120} |x^{(k)} - x^{(l)}|;$$

в частности,

$$\sup_{\{x^{(k)}\}_{k=1}^{120} \subset S^3} \prod_{k,l=1}^{120} |x^{(k)} - x^{(l)}| = 2^{-7151}\, 3^{600}\, 5^{192}(3+\sqrt{5})^{1968}(5+2\sqrt{5})^{336}$$
$$\times (7+3\sqrt{5})^{240}(1-\sqrt{5})^{5904}.$$

Доказательства этих фактов по сути повторяют доказательство теоремы 2. Они требуют еще больших вычислений и поэтому здесь не приводятся.

В заключение я выражаю искреннюю благодарность В. А. Юдину, из многочисленных обсуждений с которым возникла эта статья, а также П. А. Бородину, Д. В. Горбачеву, В. И. Иванову и В. И. Левенштейну за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hardin R. H., Sloane N. J. A. Expressing $(a^2+b^2+c^2+d^2)^3$ as a sum of 23 sixth powers // J. Combin. Theory. Ser. A. 1994. V. 68. P. 481–485.

[2] Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J. Spherical codes and designs // Geom. Dedicata. 1977. V. 6. P. 363–388.

[3] Юдин В. А. Нижние оценки для сферических дизайнов // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. №3. С. 213–223.

[4] Nikova S., Boyvalenkov P. Improvements of the lower bounds of the size of some spherical designs // Mathematika Balkanica. (to appear).

[5] Берже М. Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984.

[6] Салихов Г. Н. Кубатурные формулы для гиперсферы, инвариантные относительно группы правильного 600-гранника // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223. №5. С. 1075–1078.

[7] Seidel J. J. Isometric embeddings and geometric designs // Discrete Math. 1994. V. 136. P. 281–293.

[8] Delsarte Ph. Bounds for unrestricted codes, by linear programing // Philips Res. Rep. 1972. V. 2. P. 272–289.

[9] Кабатянский Г. А., Левенштейн В. И. О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Пробл. передачи информации. 1978. Т. 14. №1. С. 3–25.

[10] Левенштейн В. И. О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. С. 1299–1303.

[11] Сидельников В. М. Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Пробл. передачи информации. 1980. Т. 16. №3. С. 17–30.

[12] Юдин В. А. Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискретная матем. 1992. Т. 4. №2. С. 115–121.

[13] Арестов В. В., Бабенко А. Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.

[14] Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1. М.: Мир, 1990.

[15] Delsarte Ph., Levenstein V. I. Association schemes and coding theory // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. №6. P. 2477–2504.

[16] Andreev N. N., Yudin V. A. Approximation problems in discrete geometry // Advances in Multivariate Approximations / ed. W. Haussmann, K. Jetter, M. Reimer (to appear).

[17] Тот Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматлит, 1958.

[18] Whyte L. L. Unique arrangements of points on a sphere // Amer. Math. Monthly. 1952. V. 59. №9. P. 606–611.

[19] Björk G. Distributions of positive mass, which maximise a certain generalised energy integral // Ark. Math. 1956. V. 3. P. 255–269.

[20] Андреев Н. Н. Расположение точек на сфере с минимальной энергией // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 27–31.

[21] Уолш Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.

[22] Андреев Н. Н. Один сферический код // УМН. 1999. Т. 54. №1. С. 255–256.

[23] Ericson T., Zinoviev V. Spherical codes (to appear).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `andreev@mech.math.msu.su`

Поступило
05.04.1999
Исправленный вариант
08.07.1999